SESSION DE 1999

Groupe BCPST

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun aux ENS d'Ulm, Lyon et Cachan

DURÉE : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé pour toutes les épreuves d'admissibilité, sauf pour les épreuves de français et de langues. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Tournez la page S.V.P.

RAPPELS ET NOTATIONS

Pour tout $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, le symbole de Kronecker $\delta_{k,l}$ est défini par $\delta_{k,l} = 0$ si $k \neq l$ et $\delta_{k,l} = 1$ si $k = l$.

Pour des entiers $1 \leq k \leq l$, on pose $l_{[k]} = l(l-1)\ldots(l-k+1)$. Par convention, $l_{[0]} = 1$.

$Card(\mathcal{E})$ désigne le nombre d'éléments d'un ensemble $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ l'ensemble des parties de $\mathcal{E}$, et $\mathcal{P}_k(\mathcal{E})$ l'ensemble des parties de $\mathcal{E}$ à k éléments ($1 \leq k \leq Card(\mathcal{E})$).

Pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_k[x]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes d'indéterminée x, de degré inférieur ou égal à k, à coefficients réels.

Si $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles, on dit que les termes a_i et b_i sont équivalents, et l'on écrit $a_i \sim b_i$, s'il existe une suite réelle $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $a_i = b_i[1+\varepsilon_i]$ et $\lim_{i\to+\infty} \varepsilon_i = 0$.

La notation $E(\cdot)$ désigne l'espérance mathématique.

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, et Z, $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace de probabilité (Ω, A, P), telles que $Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_N$ et pour tout $i \in \{1,2,\ldots,N\}$ et tout $\omega \in \Omega$ $Z_i(\omega) = 0$ ou 1. Pour tout $r \in \{1,2,\ldots,N\}$, on définit le moment binomial d'ordre r de Z en posant :

$$\sigma_r(Z) = \sum E\left(Z_{i_1} Z_{i_2} \ldots Z_{i_r}\right)$$

où la sommation est effectuée sur tous les r-uplets $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ tels que $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq N$. Par convention, $\sigma_0(Z) = 1$. On dispose alors des inégalités de Bonferroni (qu'on ne demande pas de démontrer) :

$$\sum_{j=0}^{2l-1} (-1)^j \mathbf{C}_{k+j}^{j} \sigma_{k+j}(Z) \leq P(Z=k) \leq \sum_{j=0}^{2l} (-1)^j \mathbf{C}_{k+j}^{j} \sigma_{k+j}(Z)$$

pour tout $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ tel que $l \geq 1$ et $k + 2l \leq N$.

On rappelle enfin le lemme de Gronwall (qu'on ne demande pas de démontrer) : Soient $t_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$, et deux fonctions continues f et g de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que : $(\forall t \geq t_0)\ f(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} f(x)g(x)dx$. Alors : $(\forall t \geq t_0)\ f(t) \leq \alpha \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(x)dx\right)$.

PRÉLIMINAIRE

Il est vivement conseillé de consacrer le temps nécessaire à une bonne compréhension des phénomènes et des concepts mathématiques utilisés pour les décrire.

Ce problème est motivé par l'étude de modèles mathématiques de la propagation d'une épidémie. L'épidémie progresse par contacts entre individus sensibles et individus infectés. La maladie est bénigne et se solde par le rétablissement et l'immunisation permanente de chaque personne contaminée. On notera toujours N l'effectif total de la population, et m et n les nombres d'individus respectivement infectés et

sensibles à l'instant initial, lorsque l'épidémie se déclare (on a donc $N = m + n$). L'objet spécifique du problème est l'étude de l'étendue de l'épidémie, c'est-à-dire le nombre d'individus initialement sensibles qui, à un moment ou à un autre, contractent la maladie.

Pour représenter les contacts possibles entre individus, la population est schématisée par un graphe dont chaque sommet est occupé par un individu. Par définition, un graphe non orienté (respectivement, orienté) est un couple $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ (resp. $(\mathcal{V}, \vec{\mathcal{E}})$) où $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_N\}$ est un ensemble fini, et $\mathcal{E}$ (resp. $\vec{\mathcal{E}}$) est une partie de l'ensemble des paires $\{v_i, v_j\}$ (resp. des couples (v_i, v_j)) d'éléments distincts de $\mathcal{V}$. On appelle sommets les éléments de $\mathcal{V}$, et arêtes les éléments de $\mathcal{E}$ (resp. $\vec{\mathcal{E}}$). Un sommet est isolé s'il n'appartient à aucune arête. L'ordre d'un graphe (orienté ou non) est le nombre de ses sommets ; sa taille est le nombre de ses arêtes.

Si le graphe est non orienté, on dit que deux individus quelconques sont en contact s'ils occupent les sommets d'une même arête. Un individu infecté peut contaminer tous les individus sensibles avec lesquels il est en contact. Si le graphe est orienté, la contamination n'est possible que dans le sens des arêtes (de v_i infecté vers v_j sensible).

La PARTIE I est une étude probabiliste de l'ensemble des graphes sans sommet isolé (qui correspondent à certaines populations où l'étendue de l'épidémie peut être égale à n) . Dans la PARTIE II, on étudie les propriétés élémentaires d'une famille de polynômes, dont la PARTIE III utilise les propriétés pour calculer la loi de probabilité de l'étendue d'une épidémie. Dans la PARTIE IV, on décrit la propagation d'une épidémie au cours du temps et on recalcule son étendue grâce à l'étude de fonctions réelles à variable réelle vérifiant certaines équations différentielles. Les PARTIES I, II et IV peuvent être traitées chacune indépendamment du reste du problème. La PARTIE III utilise les résultats de la PARTIE II.

PARTIE I

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{V}_N$ un ensemble à N éléments, et $p_N \in]0,1[$. On pose $q_N = 1 - p_N$.

On considère l'espace de probabilité (Ω_N, A_N, P_N) constitué des graphes non orientés construits sur $\mathcal{V}_N$ dont les arêtes sont choisies indépendamment avec probabilité p_N. Autrement dit, on détermine les arêtes d'un graphe de Ω_N en considérant tour à tour toutes les C_N^2 paires de sommets ; pour chacune de ces paires on effectue un tirage à pile ou face ; une paire devient une arête avec probabilité p_N selon l'issue du tirage. Si $G \in \Omega_N$ possède h arêtes, on a : $P_N(G) = {p_N}^h {q_N}^{C_N^2 - h}$.

Tournez la page S.V.P.

Soit Γ_N l'ensemble des graphes de Ω_N qui ne possèdent aucun sommet isolé. On dit alors que $\Phi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, $(z,N) \mapsto \Phi(z,N)$ est une fonction-seuil s'il existe $\tilde{z} \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, si $p_N \sim \Phi(z,N)$ quand $N \to \infty$, alors

$$\lim_{N\to\infty} P_N(\Gamma_N) = 1 \text{ si } z > \tilde{z},$$

$$\lim_{N\to\infty} P_N(\Gamma_N) = 0 \text{ si } 0 < z < \tilde{z}.$$

Le but de cette partie est de construire une telle fonction-seuil et d'examiner le cas critique $z = \tilde{z}$ correspondant.

Pour $i = 1, 2, \ldots, N$, on note X_i la variable aléatoire définie sur Ω_N par $X_i(G) = 1$ si le i-ème sommet du graphe $G \in \Omega_N$ est isolé, et $X_i(G) = 0$ sinon. On pose $Y_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$.

I.1.a. Quelle est la loi de chacune des variables aléatoires X_i ? Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

I.1.b. Calculer $E(Y_N)$.

I.1.c. Montrer que le moment binomial d'ordre $r \geq 2$ de Y_N est donné par :

$$\sigma_r(Y_N) = \mathbf{C}_N^r q_N^{r(N-r)+\mathbf{C}_r^2}.$$

I.1.d. Montrer que si $\lim_{N\to\infty} p_N = 0$, alors, quand $N \to \infty$:

$$\frac{E(Y_N^2)}{[E(Y_N)]^2} \sim 1 + \frac{1}{E(Y_N)}.$$

I.2. Dans toute la suite de cette PARTIE I, on suppose que la probabilité p_N vérifie : $\lim_{N\to\infty} Np_N^2 = 0$.

I.2.a. Montrer : $E(Y_N) \sim Ne^{-Np_N}$ quand $N \to \infty$.

I.2.b. Montrer que si $\lim_{N\to\infty} E(Y_N) = +\infty$, alors $\lim_{N\to\infty} P_N(Y_N = 0) = 0$ (utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

I.2.c. En déduire une fonction-seuil Φ.

I.3.a. Soit $\zeta \in \mathbb{R}$. Construire un exemple de suite de réels $(z_N)_{N\in\mathbb{N}}$ telle que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

(i) $\lim_{N\to+\infty} z_N = 1$,

(ii) si $p_N = z_N N^{-1} \ln N$, alors $\lim_{N\to+\infty} E(Y_N) = e^{-\zeta}$.

I.3.b. On suppose que $p_N = z_N N^{-1} \ln N$ où $(z_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est la suite ainsi construite. En utilisant les inégalités de Bonferroni (cf. RAPPELS ET NOTATIONS), calculer $\lim_{N\to\infty} P_N(Y_N = k)$ en fonction de k et de ζ.

PARTIE II

Soit $U=(u_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels. On associe à U la suite de polynômes $Q_0(x;U)$, $Q_1(x;U)$, ..., d'indéterminée x, définie par récurrence comme suit :

$$Q_0(x;U)=1$$

$$Q_k(x;U)=\frac{x^k}{k!}-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{u_i^{k-i}}{(k-i)!}Q_i(x;U), \qquad \text{pour } k\geq 1.$$

Pour tout k et r dans $\mathbf{N}$, on note $Q_k^{(r)}(x;U)$ le polynôme dérivé d'ordre r de $Q_k(x;U)$.

II.1. Quel est le degré de $Q_k(x;U)$? En raisonnant par récurrence sur k, montrer :

$$(\forall(k,r)\in\mathbb{N}^2)\quad Q_k^{(r)}(u_r;U)=\delta_{k,r}.$$

Réciproquement, montrer que cette propriété caractérise la suite des polynômes $Q_k(x;U)$, $k\in\mathbf{N}$; c'est-à-dire : si une suite de polynômes $R_k(x)$ d'indéterminée x et de degré k, $k\in\mathbf{N}$, vérifie : $(\forall(k,r)\in\mathbb{N}^2)\ R_k^{(r)}(u_r)=\delta_{k,r}$, alors : $(\forall k\in\mathbf{N})\ R_k(x)=Q_k(x;U)$.

II.2. Soit $k\in\mathbf{N}$. Montrer que pour tout polynôme $R_k(x)$ d'indéterminée x et de degré k, on a :

$$R_k(x)=\sum_{i=0}^{k}R_k^{(i)}(u_i)Q_i(x;U).$$

II.3. Soient k et $r\in\mathbf{N}$. On note $v_r(U)$ la suite $(u_{r+i})_{i\in\mathbf{N}}$. En utilisant les questions II.2 et II.1, montrer qu'on a, pour $0\leq r\leq k$:

$$Q_k^{(r)}(x;U)=Q_{k-r}(x;v_r(U)).$$

II.4. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a\neq 0$. On note $aU+b$ la suite $(au_i+b)_{i\in\mathbf{N}}$. En utilisant les questions II.2 et II.1, montrer que pour tout $k\in\mathbf{N}$ on a :

$$Q_k(ax+b;aU+b)=a^kQ_k(x;U).$$

II.5.a. Donner une expression explicite de $Q_k(x;U)$ dans le cas où U est une suite constante, c'est-à-dire : $(\exists u\in\mathbb{R})\ (\forall i\in\mathbf{N})\ u_i=u$.

II.5.b. Soit $(c,d)\in\mathbb{R}^2$. On suppose que la suite U est donnée par : $(\forall i\in\mathbf{N})\ u_i=ci+d$. Montrer qu'alors, pour tout $k\in\mathbf{N}$ on a :

$$Q_k(x;U)=(x-u_0)\frac{(x-u_k)^{k-1}}{k!}.$$

Tournez la page S.V.P.

PARTIE III

Soient n et $m \in \mathbb{N}$ qui désignent, on le rappelle, les nombre d'individus sensibles et infectés présents initialement dans une population d'effectif $N \in \mathbb{N}^*$. On a donc $N = n + m$. Soient $\mathcal{V}$ un ensemble à N éléments, $\mathcal{J}_0$ un élément de $\mathcal{P}_m(\mathcal{V})$, et $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère l'espace de probabilité (Ω, A, P) constitué des graphes orientés construits sur $\mathcal{V}$ de la manière suivante. Etant donné un sommet v_i $(1 \le i \le N)$, l'existence d'une arête de v_i vers v_j $(1 \le j \le N, j \ne i)$ est déterminée par un tirage à pile ou face de probabilité p ; on réalise un tel tirage indépendamment pour chacun des $N-1$ sommets v_j ; les sommets v_j ainsi connectés à v_i par une arête orientée forment un ensemble noté $\mathcal{L}_i$. La construction du graphe est achevée lorsque les ensembles $\mathcal{L}_i$ ont été déterminés indépendamment pour chaque sommet v_i.

Etant donné un graphe de Ω défini par $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_N$, on construit deux suites d'ensembles, notées $(\mathcal{J}_\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ et $(\mathcal{S}_\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$, de la façon suivante :

$$\mathcal{S}_0 = \mathcal{V} \setminus \mathcal{J}_0,$$

$$\mathcal{J}_{\tau+1} = \left(\bigcup_{v_i \in \mathcal{J}_\tau} \mathcal{L}_i \right) \cap \mathcal{S}_\tau,$$

$$\mathcal{S}_{\tau+1} = \mathcal{S}_\tau \setminus \mathcal{J}_{\tau+1}.$$

Pour $\tau \in \mathbb{N}$, on définit les variables aléatoires $I_\tau = Card(\mathcal{J}_\tau)$ et $S_\tau = Card(\mathcal{S}_\tau)$. On a donc $I_0 = m$ et $S_0 = n$.

Chaque valeur de τ définit une <u>génération</u> de l'épidémie. On modélise ainsi la propagation de l'épidémie de génération en génération, $\mathcal{J}_\tau$ et $\mathcal{S}_\tau$ désignant les groupes d'individus respectivement infectés et sensibles présents dans la population à la génération τ.

III.1.a. Etablir la loi de S_1.

III.1.b. Vérifier la relation :

$$\sum_{j=k}^{n} \mathbf{C}_j^k P(S_1 = j | n, m) = \mathbf{C}_n^k q^{km}$$

pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n\}$. La notation $|n,m$ rappelle simplement que $I_0 = m$ et $S_0 = n$.

III.1.c. Pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, on pose : $\phi_k(n,m) = n_{[k]} q^{k(n+m-k)}$. Etablir :

$$\phi_k(n,m) = \sum_{j=k}^{n} \phi_k(j, n-j) P(S_1 = j | n, m)$$

pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n\}$.

III.2. Soit $T = \inf\{\tau \in \mathbb{N} | I_\tau = 0\}$. Montrer que la probabilité que T soit fini est égale à 1.

III.3. On admettra que S_T définit une variable aléatoire sur Ω. Par définition, l'étendue de l'épidémie est égale à $n - S_T$. On note φ la fonction génératrice de S_T, définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi(x|n,m) = E(x^{S_T}|n,m)$ (ici encore, la notation $|n,m$ n'est utilisée que pour rappeler que $I_0 = m$ et $S_0 = n$). Si $U = (u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels, on note $Q_k(x;U)$, $k \in \mathbb{N}$, la suite de polynômes associée à U et définie dans la PARTIE II.

III.3.a. Montrer que $\varphi(x|n,m)$ est un polynôme d'indéterminée x. Calculer $\varphi(x|0,m)$ et $\varphi(x|n,0)$.

III.3.b. Etablir la relation :

$$\varphi(x|n,m) = \sum_{j=0}^{n} \varphi(x|j,n-j) P(S_1 = j|n,m).$$

III.3.c. On note $U^{(q)}$ la suite de terme général $u_i^{(q)} = q^i$, $i \in \mathbb{N}$. Montrer qu'on a :

$$\varphi(x|n,m) = \sum_{k=0}^{n} n_{[k]} q^{k(n+m-k)} Q_k\left(x; U^{(q)}\right).$$

III.3.d. En utilisant les résultats des questions II.3 et II.4, montrer que, pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n\}$:

$$P(n - S_T = k) = n_{[k]} q^{(n-k)(m+k)} Q_k\left(1; \nu_m\left(U^{(q)}\right)\right)$$

et, pour tout $r \in \{1,2,\ldots,n\}$:

$$E\left(S_{T,[r]}\right) = \sum_{j=r}^{n} n_{[j]} q^{j(n+m-j)} Q_{j-r}\left(1; \nu_r\left(U^{(q)}\right)\right).$$

(N.B.: La notation $S_{T,[r]}$ désigne le produit $S_T(S_T - 1)\ldots(S_T - r + 1)$.)

III.4. On suppose dans cette seule question III.4 que q dépend de n, ce que l'on indique en substituant à q la notation q_n. Plus précisément, on suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $q_n = \exp(-\lambda/n)$.

III.4.a. Soit W la suite de terme général $w_i = -\lambda i$, $i \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \{0,1,\ldots,n\}$. Montrer qu'on a :

$$\lim_{n\to\infty} n_{[k]} Q_k\left(1; \nu_m\left(U^{(q_n)}\right)\right) = Q_k\left(0; \nu_m(W)\right)$$

(utiliser la question II.4).

III.4.b. En déduire que pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} P(n - S_T = k) = m(m+k)^{k-1} \exp\left[-\lambda(m+k)\right] \frac{\lambda^k}{k!}$$

(utiliser la question II.5.b).

III.5. On suppose dans cette seule question III.5 que q dépend de m, ce que l'on indique en substituant à q la notation q_m. Plus précisément, on suppose qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $q_m = \exp(-\mu/m)$. Soit $\theta = 1 - \exp(-\mu)$. Montrer que pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ on a :

$$\lim_{m\to\infty} P(n - S_T = k) = \mathbf{C}_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k}.$$

Tournez la page S.V.P.

PARTIE IV

On considère une population d'effectif $N \in \mathbb{N}^*$, associée à un graphe non orienté $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$. On rappelle qu'initialement, m sommets du graphe sont occupés par des individus infectés, et les n autres sommets, par des individus sensibles. A tout instant $t \in \mathbb{R}_+$, on décrit la population par le nombre $n(t)$ de sommets occupés par des individus sensibles ; le nombre $m(t)$ de sommets occupés par des individus infectés ; le nombre $h_{SS}(t)$ de couples (v_i, v_j) tels que v_i et v_j définissent les sommets d'une arête occupés par des individus sensibles ; et le nombre $h_{SI}(t)$ de couples (v_i, v_j) tels que v_i et v_j définissent les sommets d'une arête où v_i est occupé par un individu sensible et v_j, par un individu infecté. On fait l'hypothèse qu'un individu sensible en contact avec un individu infecté a une probabilité $\beta > 0$ par unité de temps d'être à son tour infecté. On pose $S(t) = N^{-1}n(t)$, $I(t) = N^{-1}m(t)$, $[SS](t) = N^{-1}h_{SS}(t)$ et $[SI](t) = N^{-1}h_{SI}(t)$. On suppose que si N augmente, m augmente aussi, mais de telle sorte que le rapport $m/N = I(0)$ tende vers une limite $\bar{I} \in]0,1[$ quand $N \to \infty$. Pour N suffisamment grand, un modèle de la propagation de l'épidémie est alors donné par le système (1) d'équations différentielles (qu'on ne demande pas de justifier) :

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta[SI] \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta[SI] - I \\ \dfrac{d[SS]}{dt} = -2\beta\dfrac{[SS][SI]}{S} \\ \dfrac{d[SI]}{dt} = \beta\left(\dfrac{[SS][SI]}{S} - \dfrac{[SI]^2}{S} - [SI]\right) - [SI] \end{cases}$$

avec les conditions initiales (C1) : $S(0) = 1 - \bar{I}$, $I(0) = \bar{I}$, $[SS](0) = \gamma(1-\bar{I})^2$ et $[SI](0) = \gamma\bar{I}(1-\bar{I})$ où $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé.

IV.1. On admet que le système (1) possède une et une seule solution satisfaisant aux conditions initiales (C1) et définie sur tout $\mathbb{R}_+$. On note $(S, I, [SS], [SI])$ cette solution et on admet que $(\forall t \in \mathbb{R}_+)$ $S(t) > 0$ et qu'il existe $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ et $t_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $(\forall t \in [0, t_1])$ $S(t) \geq \kappa$ et $I(t) \geq \kappa$.

IV.1.a. Montrer qu'on a :

$$(\forall t \in \mathbb{R}_+) \quad [SS](t) = \gamma S(t)^2 .$$

IV.1.b. En posant $\hat{I}(t) = [SI](t)/S(t)$, montrer que le triplet $\left(S, I, \hat{I}\right)$ vérifie le système (2) suivant :

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta S\hat{I} \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta S\hat{I} - I \\ \dfrac{d\hat{I}}{dt} = (\gamma\beta S - \beta - 1)\hat{I} \end{cases}$$

IV.2. On admet que le système (2) possède $\left(S, I, \hat{I}\right)$ comme unique solution satisfaisant aux conditions initiales (C2) : $S(0) = 1 - \bar{I}$, $I(0) = \bar{I}$ et $\hat{I}(0) = \gamma\bar{I}$ et définie sur tout $\mathbb{R}_+$.

IV.2.a. Montrer qu'il existe c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}_+^*$, que l'on déterminera en fonction de β et $\bar{I}$, tels que :

$$\left(\forall t \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad c_1 \ln\left[c_2 S(t)\right] = -\gamma\left[1 - S(t)\right] + \hat{I}(t).$$

IV.2.b. Montrer que la limite de $S(t)$ quand $t \to +\infty$ existe et est finie. On la note S_∞ et on définit ici l'étendue de l'épidémie comme étant égale à $1 - S_\infty$. Etablir une équation reliant l'étendue de l'épidémie aux paramètres γ, β et $\bar{I}$ (on ne demande pas de résoudre cette équation).

IV.2.c Montrer :

$$\left(\forall t \in \mathbb{R}_+\right) \quad \hat{I}(t) \sim \gamma I(t)$$

quand $\gamma \to +\infty$ et $\beta \to 0$ de telle sorte que le produit $\gamma\beta$ reste constant. On admettra pour cela qu'il existe une constante réelle $C > 0$, indépendante de γ, telle que : $\left(\forall t \in [0, t_1]\right) \quad \hat{I}(t) \leq C\gamma$, et on appliquera le lemme de Gronwall à la fonction $\hat{I} - \gamma I$ (cf. RAPPELS ET NOTATIONS).

IV.3. On peut démontrer (mais il n'est pas demandé de le faire ici) que le système (3) suivant :

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\gamma\beta SI \\ \dfrac{dI}{dt} = \gamma\beta SI - I \end{cases}$$

possède une unique solution satisfaisant aux conditions initiales (C3) : $S(0) = 1 - \bar{I}$ et $I(0) = \bar{I}$, et définie sur tout $\mathbb{R}_+$; et que cette solution est « peu différente » de l'unique solution du système (2) satisfaisant aux conditions initiales (C2) et définie sur tout $\mathbb{R}_+$. On suppose à présent que le groupe d'individus sensibles est réalimenté par immigration. Le système (3) est modifié pour tenir compte de cette nouvelle hypothèse, et devient (4) :

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\gamma\beta SI + \Delta \\ \dfrac{dI}{dt} = \gamma\beta SI - I \end{cases}$$

avec $\Delta \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, et les mêmes conditions initiales (C3).

Tournez la page S.V.P.

IV.3.a. Quelles relations doivent vérifier γ, β, Δ et $\bar{I}$ pour que le système (4) admette une solution constante $(S^*, I^*) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$?

IV.3.b. On suppose que les relations trouvées à la question précédente sont satisfaites. On choisit à présent comme conditions initiales (C4) : $S(0) = (1+\varepsilon_0)S^*$ et $I(0) = (1+\eta_0)I^*$ où $\varepsilon_0 \in]-1,1[$ et $\eta_0 \in]-1,1[$. Soit (S,I) la solution (dont on admet l'existence et l'unicité) de (4) satisfaisant aux conditions initiales (C4) et définie sur tout $\mathbb{R}_+$. On définit les fonctions ε et η de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ en posant, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $S(t) = [1+\varepsilon(t)]S^*$ et $I(t) = [1+\eta(t)]I^*$. Ecrire le système d'équations différentielles (5) que doivent vérifier les fonctions ε et η.

IV.3.c. Une approximation linéaire du système (5) est donnée par (6) :

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\varepsilon}{dt} = -\gamma\beta\Delta(\varepsilon+\eta) \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \varepsilon \end{cases}$$

Déduire de (6) une équation différentielle linéaire du second ordre que doit vérifier la fonction ε. Résoudre cette équation différentielle avec la condition initiale $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$. Que suggère l'étude de la solution quant au comportement asymptotique de $S(t)$ et $I(t)$?

IV.4. Soit $(\varepsilon_0, \eta_0) \in]-1,+1[^2$. On admet que le système (5) possède une et une seule solution (ε, η) satisfaisant aux conditions initiales $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ et $\eta(0) = \eta_0$ et définie sur tout $\mathbb{R}_+$.

IV.4.a. On considère la fonction de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$V(x,y) = [1+x-\ln(1+x)] + \gamma\beta\Delta[1+y-\ln(1+y)].$$

Montrer qu'on a :

$$(\forall t \in \mathbb{R}_+) \quad \frac{d}{dt}V(\varepsilon(t), \eta(t)) \le 0 .$$

En déduire que $V(\varepsilon(t), \eta(t))$ admet une limite finie quand $t \to +\infty$, et déterminer cette limite.

IV.4.b. Soit c un réel supérieur ou égal à $1+\gamma\beta\Delta$. Etudier la courbe définie dans le plan affine $(O;x,y)$ par $V(x,y) = c$.

IV.4.c. Montrer qu'on a : $\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim_{t\to+\infty} \eta(t) = 0$. Conclure en prouvant que quelles que soient les conditions initiales (C4), la solution (S,I) du système (4) vérifie : $\lim_{t\to+\infty} S(t) = S^*$ et $\lim_{t\to+\infty} I(t) = I^*$. (L'étendue de l'épidémie vaut donc $1 - S^*$ indépendamment des valeurs de ε_0 et η_0.)